חישוביות - תרגול 1

דוד קלוטה

24 במרץ 2026

מהלך התרגול

מה הולך להיות לנו היום?

1. נרשום הקדמה להכל
2. ניתן דוגמאות ל־DFAים
3. נגדיר דברים פורמלית
4. נבין איך מוכיחים אוטומט
5. נסתכל על פונקציית המעברים המוכללת δ^*
6. ונוכיח את רגולריות השפה L_{even} [הערה של דוד קלוטה: זה כבר יקרה בתרגול הבא / בתרגיל הבית]

התחלנו!

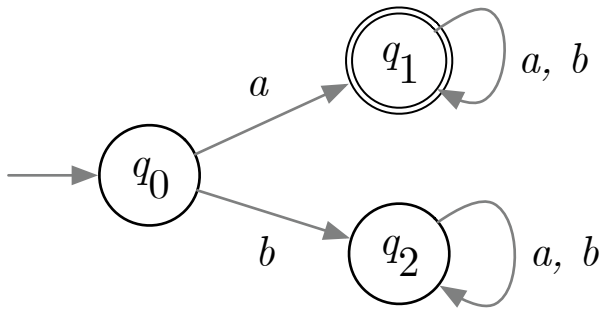
1.1 הקדמה

מהי חישוביות? דוגמה לשאלה בנושא חישוביות היא **האם ניתן** ליצור תכנית Python שמקבלת תוכנה אחרת ואומרת האם היא ממיינת מערך באופן נכון? הבעיה בזה היא בעצם כי כמות המערכים האפשריים היא אינסופית - ובאמת נראה כי התשובה לשאלה זו היא **לא** חד משמעי. תחום זה נקרא חישוביות כי הוא מנסה להגיד אם בעיה כלשהי היא אפשרית או לא.

מהי סיבוכיות? תחום זה, הנכלל כולו בתוך תחום הדברים החשיביים, ושואל כי בהינתן ניתן לחשב משהו, כמה יעיל יהיה החישוב? לדוגמה, נניח כי יש לנו מפה ונצטרך לצבוע אותה ב־3 צבעים כך שלשתי ערים עם גבול משותף לא יהיה את אותו הצבע. האם ניתן לעשות זאת באופן יעיל? נמשיך את ההגדרה מאלגוריתמים כי "יעיל" מקביל ל"זמן פולינומיאלי", ובהמשך נרחיב ונדון בבעיות אשר ניתן לפתור בזמן פולינומיאלי. כמו כן, נסתכל גם על האם ניתן לוודא כי הפתרון נכון בזמן פולינומיאלי. בעיות אשר ניתן לוודא בזמן פולינומיאלי נקראות בעיות NP. ספציפית, הבעיה אשר נתנו הינה NP־קשה.

1.2 דוגמאות לאוטומטים סופיים דטרמיניסטיים

אוטומט זה בעצם מצבים עם קשתות כאשר על הקשתות יש אותיות אשר אומרות לנו איך לעבור ממצב למצב. להלן דוגמה לאוטומט:

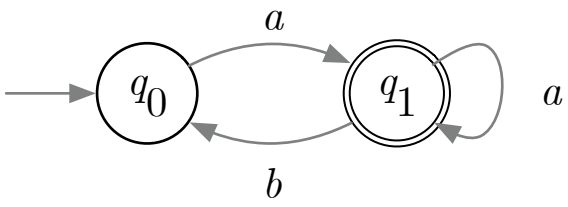


איור 1: הדוגמה הראשונה אשר נתנו לאוטומט

דוגמה 1.2.1. נראה עכשיו מה קורה באוטומט המופיע באיור 1 בעבור מספר מילים:

1. המילה abb נגמרת ב־q_1 ולכן מתקבלת.
2. המילה b נגמרת ב־q_2 ולכן לא מתקבלת.
3. המילה ε (המילה הריקה) נגמרת ב־q_0 ולכן לא מתקבלת.

מכאן נראה כי אוטומט זה הוא אוטומט המקבל מילים המתחילות באות a.



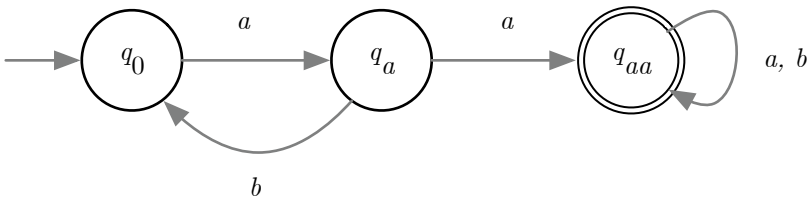
איור 2: הדוגמה השנייה אשר נתנו לאוטומט

דוגמה 1.2.2. נראה עכשיו מה קורה באוטומט המופיע באיור 2 בעבור מספר מילים:

1. המילה ab נגמרת ב־q_0 ולכן לא מתקבלת
2. המילה aba נגמרת ב־q_1 ולכן מתקבלת
3. המילה aa נגמרת ב־q_1 ולכן מתקבלת

מפה נראה כי אוטומט זה מקבל מילים אשר נגמרות ב־a.

דוגמה 1.2.3. נבנה כעת אוטומט שהמילים שהוא מקבל הן המילים שמכילות את הרצף aa. נרצה שבאוטומט יהיה מצב אליו נגיע אם היה aa - זהו מצב מקבל. נרצה גם מצב אשר בו קיבלנו אות a - וזה יהיה מצב לא מקבל.
בסופו של דבר נקבל את האוטומט הבא:



איור 3: אוטומט בעבור השפה שניסחנו בדוגמה

עבור כל מצב, אלה המילים שמגיעות אליו:

1. q_{aa} - כל המילים שמכילות את הרצף aa
2. q_a כל המילים שנגמרות ב־a ולא מכילות את הרצף aa
3. q_0 כל המילים שלא נגמרות ב־a ולא מכילות את aa

כאשר אנחנו מאפיינים מצבים, עלינו לשים לב כי האיחוד של המילים שמגיעות לכל מצב הוא כלל המילים בשפה. בתרגיל בית, האוטומט יהיה מאוד דומה לאוטומט זה, ככל הנראה בעבור הרצף abb

1.3 הגדרות פורמליות

הגדרה 1.3.1. א"ב Σ הוא קבוצה סופית ולא ריקה. איברים $\sigma \in \Sigma$ ייקראו אותיות.

דוגמה 1.3.1. להלן דוגמאות לא"ב שונים:

$$\Sigma \overset{\text{def}}{=\!=} \{0, \#, *, a\}, \quad \Sigma = \{a, b\}, \quad , \Sigma = \{0, 1\}$$

בהתאם לכך, נוכל להגדיר מילים:

הגדרה 1.3.2. נגדיר לכל $n \in \mathbb{N}$ בהינתן Σ א"ב:

$$\Sigma^n \overset{\text{def}}{=\!=} \{(\sigma_i)_{i=1}^n \mid \forall i \in [n] : \sigma_i \in \Sigma\}$$

מילה באורך n תהיה איבר ב־Σ^n.

הערה 1.3.1. בעיקרון, נצטרך לרשום מילה כ־$W = (a, b, a, b)$ אבל מטעמי נוחות, נרשום $W = abab$

הגדרה 1.3.3. נגדיר את אוסף כל המילים מעל א"ב Σ להיות

$$\Sigma^* \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$$

הגדרה 1.3.4. בהינתן א"ב Σ, קבוצה $L \subseteq \Sigma^*$ תיקרא שפה.

דוגמה **1.3.2.** $L_1 = \{aa, ab, a\}$ היא שפה סופית מעל א"ב $\Sigma = \{a, b\}$

דוגמה **1.3.3.** $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w\text{'s first letter is } a\}$ היא שפה אינסופית מעל א"ב $\Sigma = \{a, b\}$

דוגמה **1.3.4.** $L_3 = \{\varepsilon\}$ היא שפה סופית מעל א"ב $\Sigma = \{a\}$

דוגמה **1.3.5.** $L_4 = \varnothing$ היא גם שפה מעל $\Sigma = \{a, b\}$ - נבנה אוטומט ללא מצב מקבל.

דוגמה **1.3.6.** $L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| < 24\}$ היא שפה סופית מעל $\Sigma = \{a, b\}$

למה לנו להגדיר אוטומט? בהמשך נשחק קצת עם סוגים שונים של אוטומט - ועל מנת לעשות זאת, עלינו להגדיר פורמלית מהו אוטומט

הגדרה 1.3.5. אוטומט סופי דטרמיניסטי (DFA) A מוגדר להיות חמישייה $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש:

1. Q היא קבוצת מצבים סופית
2. Σ א"ב (סופי)
3. $\delta : (Q \times \Sigma) \to Q$ היא פונקציית מעברים שמקבלת מצב ואות ומחזירה לאיזה מצב צריך לעבור
4. $q_0 \in Q$ הוא מצב התחלתי
5. $F \subseteq Q$ הם המצבים המקבלים

דוגמה **1.3.7.** להלן ההגדרה הפורמלית של האוטומט אשר רשום בדוגמה 1.2.1:

1. $Q = \{q_0.q_1, q_2\}$
2. $\Sigma = \{a, b\}$
3. $F = \{q_1\}$
4. להלן הערכים של δ:

טבלה 1: המצבים של δ בהינתן קלט ומצב

$\Sigma \backslash Q$	q_0	q_1	q_2
a	q_1	q_1	q_2
b	q_2	q_1	q_2

הגדרה 1.3.6. תהי $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ מילה. ריצה של אוטומט A על w היא סדרה של מצבים $r_0, \dots, r_n \in Q$ כאשר מתקיימים:

1. $r_0 = q_0$
2. $\forall 0 \leqslant i < n : r_{i+1} = \delta(r_i, w_{i+1})$

דוגמה **1.3.8.** נרשום ריצה של המילה $w = aba$ בעבור האוטומט בדוגמה 2.2.1:

$$r_0 = q_0, \quad r_1 = q_1, \quad , r_2 = q_2, \quad r_3 = q_1$$

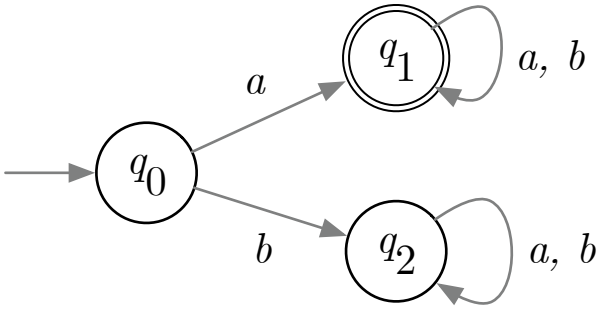
הגדרה 1.3.7. תהי $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ מילה. בסימונים של קודם נאמר שאוטומט A מקבל את w אם $r_n \in F$

הגדרה 1.3.8. השפה של אוטומט A היא $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid A \text{ accepts } w$

הגדרה 1.3.9. נאמר שאוטומט A מכריע את השפה L אם $L(A) = L$

1.4 הוכחה פורמלית של אוטומט

נחזור לאוטומט מדוגמה 1.2.1,



איור 4: האוטומט מדוגמה 1.2.1

ונרשום את השפה

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ begins with letter } a\}$$

טענה 1.4.1. $L(A) = L$

טענת עזר 1.4.1. *המילים שמגיעות לכל מצב הן:*

1. q_0 - *המילה הריקה*
2. q_1 - *מילים שמתחילות ב־a*
3. q_2 - *מילים שמתחילות ב־b*

הוכחת טענה 1.4.1. נניח כי $w \in L$. זה מתרחש אמ"ם w מתחיל ב־a שלפי טענת עזר 1.4.1 ממרחש אמ"ם w מגיע ל־q_1. מהיותו של q_1 מצב קבלה יחיד, נקבל כי זה קורה אמ"ם A מקבלת את W שמתרחש אמ"ם $w \in L(A)$ □

הוכחת טענת עזר 1.4.1. נוכיח באינדוקציה על אורך המילה $|w| = n$:

מקרה הבסיס $|w| = 0$ אז w היא המילה הריקה ובאמת בריצה של האוטומט על המילה הריקה הוא מגיע ל־q_0

המקרה הכללי נניח שהטענה מתקיימת למילה מאורך n ונוכיח על $|w| = n + 1$. נכתוב $w = u\dot{\sigma}$ כאשר $|u| = n, \sigma \in \Sigma$. נפצל למקרים לפי הריצה של A על u:

1. **הריצה נגמרה ב־q_0** מהנחת האינדוקציה, $u = \varepsilon$ ולכן $w = \varepsilon\sigma = \sigma$. אם $\sigma = a$ אז $w = a$ ולכן צריך להוכיח שהאוטומט מסיים את הריצה ב־q_1. ואכן, $\delta(q_0, a) = q_1$ אם $\sigma = b$ אז $w = b$ ולכן מתחיל ב־b. צריך להוכיח כי האוטומט מסיים את הריצה ב־q_2 ואכן $\delta(q_0, b) = q_2$.
2. **הריצה נגמרה ב־q_1** u מתחיל ב־a ולכן w גם מתחיל ב־a. לכן, צריך להוכיח שהריצה מסתיימת ב־q_1 ואכן $\forall\sigma \in \Sigma : \delta(q_1, \sigma) = q_1$
3. **הריצה נגמרה ב־q_1** u מתחיל ב־b ולכן w גם מתחיל ב־b. לכן, צריך להוכיח שהריצה מסתיימת ב־q_2 ואכן $\forall\sigma \in \Sigma : \delta(q_2, \sigma) = q_2$

מכאן טענת העזר נכונה, כנדרש. □

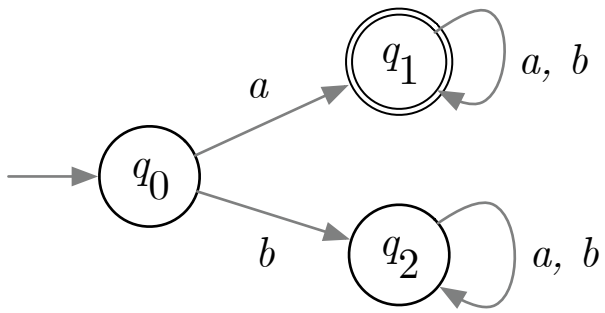
1.5 פונקציית המעברים המוכללת

הגדרה 1.5.1. $\delta^* : (Q \times \Sigma^*) \to Q$ היא פונקציית המעברים המוכללת, והיא מוגדרת באופן הבא:

$$\delta^*(q, w) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{cases} q & w = \varepsilon \\ \delta(\delta^*(q, u), \sigma) & w = u \cdot \sigma \end{cases}$$

בעצם זוהי פונקציה המקבלת מצב ומילה ומחזירה את המצב שהמילה גורמת אליו

דוגמה 1.5.1. נחזור לאוטומט מדוגמה 1.2.1



איור 5: שוב האוטומט מ־1.2.1

ונרצה להבין איך $\delta^*(q_0, aab) = q_1$:

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, aab) &= \delta(\delta^*(q_0, aa), b) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(q_0, a), a), b) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta^*(q_0, \varepsilon), a), a), b) \\
&= \delta(\delta(\delta(q_0, a), a), b) \\
&= \delta(\delta(q_1, a), b) \\
&= \delta(q_1, b) \\
&= q_1
\end{aligned}$$

נוכל להגדיר קבלה באופן חלופי עכשיו:

הגדרה 1.5.2. נאמר שאוטומט A מקבל מילה w אם $\delta^*(q_0, w) \in F$

טענה 1.5.1. *לכל מצב $q \in Q$ ולכל מילים $w, w' \in \Sigma^*$ מתקיים*

$$\delta^*(q, w \cdot w') = \delta^*(\delta^*(q, w), w')$$

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n = |w'|$:

מקרה בסיס $|w'| = 0$ מכאן $w' = \varepsilon$ ואז

$$\delta^*(\delta^*(q, w), w') = \delta^*(\delta^*(q, w), \varepsilon) \overset{\text{מהגדרת } \delta^*}{=\!=\!=} \delta^*(q, w) = \delta^*(q, w \cdot w')$$

המקרה הכללי נניח עבור $|w'| = n$ ונוכיח עבור $|w'| = n + 1$: נרשום $w' = u \cdot \sigma$ ואז:

$$\begin{aligned}
\delta^*(q, w \cdot w') &= \delta^*(q, w \cdot u \cdot \sigma) \\
&= \delta(\delta^*(q, w \cdot u), \sigma) \\
&\overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=\!=\!=} \delta(\delta^*(\delta^*(q, w), u), \sigma) \\
&= \delta^*(\delta^*(q, w), u \cdot \sigma) \\
&= \delta^*(\delta^{*(q,w}, w')
\end{aligned}$$

הטענה נכונה, כנדרש. □